7.4.7 Polohové úlohy v prostoru II

Předpoklady: 7406

Př. 1: Urči vzájemnou polohu rovin $\rho: 2x-4y+2z-4=0$ a $\sigma: 3x-6y+3z-9=0$.

Roviny mohou být v prostoru rovnoběžné, totožné nebo různoběžné (podobně jako přímky v rovině).
Upravíme rovnice tak, aby před *x* byla jednička.

$\rho: 2x-4y+2z-4=0$	$\sigma: 3x-6y+3z-9=0$
$\rho: x-2y+z-2=0$	$\sigma: x-2y+z-3=0$

Rovnice obou rovin se liší v koeficientu d $\Rightarrow$ roviny jsou rovnoběžné (mají stejný směr, ale nejde o shodné roviny).

Př. 2: Urči zbývající koeficienty v rovnicích rovin ρ a σ, tak aby byly totožné.
$\rho: 2x+by+3z-2=0$, $\sigma: ax+5y-2z+d=0$.

Roviny jsou totožné, když jejich obecné rovnice jsou jedna druhé násobkem.

$a_\rho x = k\cdot a_\sigma x$	$b_\rho y = k\cdot b_\sigma y$	$c_\rho z = k\cdot c_\sigma z$	$d_\rho = k\cdot d_\sigma$
$2 = k\cdot a_\sigma$	$b_\rho = k\cdot 5$	$3 = k\cdot(-2)$	$-2 = k\cdot d_\sigma$
		$k=-\frac{3}{2}$	

Známe poměr obou rovnic $\Rightarrow$ dopočítáme ostatní koeficienty:

$a_\sigma = \frac{2}{k} = \frac{2}{-\frac{3}{2}} = -\frac{4}{3}$ $\quad b_\rho = k\cdot 5 = -\frac{3}{2}\cdot 5 = -\frac{15}{2}$ $\quad d_\sigma = \frac{-2}{k} = \frac{-2}{-\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$

Rovnice rovin: $\rho: 2x-\frac{15}{2}y+3z-2=0$ $\quad \sigma: -\frac{4}{3}x+5y-2z+\frac{4}{3}=0$.

Př. 3: Urči vzájemnou polohu rovin $\rho: 2x-4y+2z-4=0$ a $\sigma: 2x-3y+3z-3=0$.
Pokud jsou roviny různoběžné najdi jejich průsečnici.

Rovnice rovin nejsou svými násobky.
Vypíšeme si normálové vektory: $\boldsymbol{n}_\rho = (2;-4;2)$ $\quad \boldsymbol{n}_\sigma = (2;-3;3)$
$\Rightarrow$ normálové vektory nemají stejný směr $\Rightarrow$ roviny jsou různoběžné $\Rightarrow$ mají průsečnici (množinu společných bodů) $\Rightarrow$ řešíme soustavu rovnic (hledáme společné body):

$$2x-4y+2z-4=0$$
$$2x-3y+3z-3=0$$

$$2x-4y+2z-4=0$$
$$[\![1]\!]-[\![2]\!] \qquad -y-z-1=0$$

Dvě rovnice a tři neznámé $\Rightarrow$ nekonečně mnoho řešení (přímka má nekonečně mnoho bodů) $\Rightarrow$ jednu neznámou volíme (například *z*) a ostatní vyjadřujeme pomocí zvolené neznámé:
z druhé rovnice: $y=-1-z$.

První rovnice: $2x-4y+2z-4=0 \quad /:2$.
$x-2y+z-2=0$ dosadíme $y=-1-z$:
$x-2(-1-z)+z-2=0$
$x+2+2z+z-2=0$
$x=-3z$
Řešením soustavy je množina bodů $K=\{[-3z;-1-z;z], z\in R\}$: Řešení nevypadá jako vyjádření přímky. Stačí položit $z=t$: $K=\{[-3t;-1-t;t], t\in R\}$ - to už odpovídá tomu, co si pod parametrickým vyjádřením přímky v prostoru představujeme.

Dodatek: Správnost řešení předchozího příkladu si můžeme ověřit dosazením do rovnic obou rovin (měly bychom získat nekonečně mnoho řešení, protože průsečnice musí ležet v obou rovinách).
$\rho: 2x-4y+2z-4=0$
$2(-3t)-4(-1-t)+2t-4=0$
$-6t+4+4t+2t-4=0$
$0=0 \Rightarrow$ průsečnice leží v rovině ρ.
$\sigma: 2x-3y+3z-3=0$
$2(-3t)-3(-1-t)+3t-3=0$
$-6t+3+3t+3t-3=0$
$0=0 \Rightarrow$ průsečnice leží v rovině σ.

Př. 4: Najdi společné body rovin $\rho:\{[1+t-s;2-t+2s;-1+s], t,s\in R\}$ a $\sigma: x+y-z-4=0$. Na základě výsledku rozhodni o vzájemné poloze rovin ρ a σ.

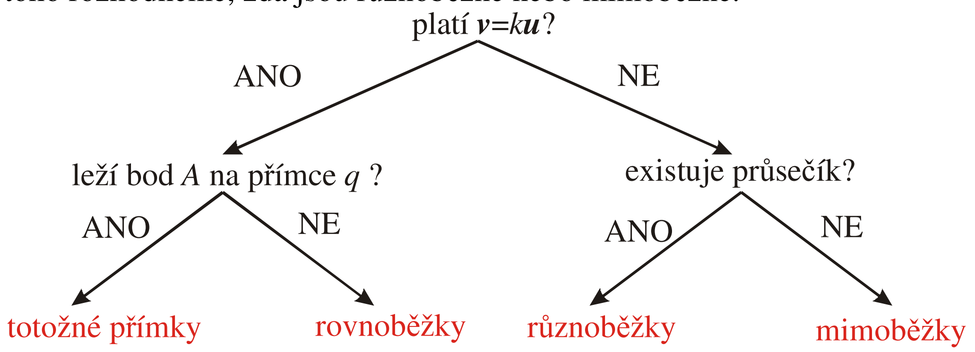
Hledáme společné body $\Rightarrow$ řešíme soustavu rovnic:
$$\begin{aligned} x&=1+t-s\\ y&=2-t+2s\\ z&=-1+s\\ x+y-z-4&=0 \end{aligned}.$$
Dosadíme z prvních tří rovnic do čtvrté: $(1+t-s)+(2-t+2s)-(-1+s)-4=0$
$1+t-s+2-t+2s+1-s-4=0$
$0=0$
Řešením je libovolná dvojice čísel *t*, *s* $\Rightarrow$ společné body získám tak, že do parametrického vyjádření roviny ρ dosadím libovolnou dvojici čísel *t*, *s* $\Rightarrow$ všechny body roviny ρ jsou společné $\Rightarrow$ roviny jsou totožné.

Dodatek: Objevují se dotazy, jak by řešení příkladu vypadalo, kdyby obě roviny byly různoběžné. Můžeme si to ukázat snadno tím, že trochu změníme rovnici roviny σ (tak aby novy normálový vektor nebyl násobkem původního):
$\sigma_2: x+2y-z-4=0 \Rightarrow$ dosazení: $(1+t-s)+2(2-t+2s)-(-1+s)-4=0$
$1+t-s+4-2t+4s+1-s-4=0$
$-t+2s+2=0 \Rightarrow t=2s+2$
Získanou hodnotu *t* můžeme dosadit do rovnic pro parametrického vyjádření

$$x = 1 + t - s = 1 + 2s + 2 - s = s + 3$$
roviny ρ: $$y = 2 - t + 2s = 2 - (2s + 2) + 2s = 0 .$$
$$z = -1 + s = -1 + 2s + 2 = 2s + 1$$
Tím jsme získali parametrické vyjádření přímky (průsečnice obou rovin).

Př. 5: Zopakuj postup, kterým rozhodneš o vzájemné poloze dvou parametricky zadaných přímek $p(A;\boldsymbol{u})$ a $q(B;\boldsymbol{v})$ v prostoru.

Podobné jako u vzájemné polohy dvou přímek v rovině, přibude možnost mimoběžnosti přímek $\Rightarrow$ pokud nebudou přímky rovnoběžné, musíme zjistit, zda existuje průsečík, a podle toho rozhodneme, zda jsou různoběžné nebo mimoběžné.



Př. 6: Je dána přímka $p(P;\boldsymbol{u}_p)$, $P[1;2;-1]$, $\boldsymbol{u}_p = (2;-1;1)$. Urči postupně vzájemnou polohu přímky p a přímek:

a) $a: \{[2-4t;3+2t;3-2t], t \in R\}$

b) $b(B;\boldsymbol{u}_b)$, $B[-1;2;1]$, $\boldsymbol{u}_b = (1;1;-2)$

c) c: $x = -1 - 2t$, $y = 3 + t$, $z = -2 - t, t \in R$

d) $d: \{[-1+2t;-1+t;-2+t], t \in R\}$

a) $a: \{[2-4t;3+2t;3-2t], t \in R\}$

Porovnáme směrové vektory: $\boldsymbol{u}_p = (2;-1;1)$ $\quad \boldsymbol{u}_a = (-4;2;-2)$.

Platí: $\boldsymbol{u}_a = -2 \cdot \boldsymbol{u}_p$ $\Rightarrow$ přímky jsou rovnoběžné nebo totožné.

Zjišťujeme, zda bod $P[1;2;-1]$ leží na přímce a:

$1 = 2 - 4t \Rightarrow t = \frac{1}{4}$

$2 = 3 + 2t \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ bod P neleží na přímce a $\Rightarrow$ **přímky p a a jsou rovnoběžné**.

$-1 = 3 - 2t \Rightarrow t = 2$

b) $b(B;\boldsymbol{u}_b)$, $B[-1;2;1]$, $\boldsymbol{u}_b = (1;1;-2)$

Porovnáme směrové vektory: $\boldsymbol{u}_p = (2;-1;1)$ $\quad \boldsymbol{u}_b = (1;1;-2)$.

Neplatí $\boldsymbol{u}_b = k \cdot \boldsymbol{u}_p$ $\Rightarrow$ přímky jsou různoběžné nebo mimoběžné.

Hledáme průsečík:

$$\begin{array}{l} 1+2t=-1+s \\ 2-t=2+s \\ \underline{-1+t=1-2s} \\ 2t-s=-2 \\ -t-s=0 \Rightarrow s=-t \\ \underline{t+2s=2} \end{array}$$

Dosadíme do obou zbývajících rovnic:

$$\begin{array}{l} 2t-(-t)=-2 \Rightarrow t=-\dfrac{2}{3} \\ t+2(-t)=-2 \Rightarrow t=2 \end{array}$$

$\Rightarrow$ soustava nemá řešení $\Rightarrow$ neexistuje průsečík přímek p a b $\Rightarrow$ **přímky p a b jsou mimoběžné**.

c) c: $\begin{array}{l} x=-1-2t \\ y=3+t \\ z=-2-t, t\in R \end{array}$

porovnáme směrové vektory: $\boldsymbol{u}_p=(2;-1;1)$ $\boldsymbol{u}_c=(-2;1;-1)$.

Platí: $\boldsymbol{u}_c=-1\cdot\boldsymbol{u}_p$ $\Rightarrow$ přímky jsou rovnoběžné nebo totožné.

Zjišťujeme, zda bod $P[1;2;-1]$ leží na přímce c:

$$\begin{array}{l} 1=-1-2t \Rightarrow t=-1 \\ 2=3+t \Rightarrow t=-1 \\ -1=-2-t \Rightarrow t=-1 \end{array}$$

$\Rightarrow$ bod P leží na přímce c $\Rightarrow$ **přímky p a c jsou totožné**.

d) $d:\{[-1+2t;-1+t;-2+t], t\in R\}$

Porovnáme směrové vektory: $\boldsymbol{u}_p=(2;-1;1)$ $\boldsymbol{u}_d=(2;1;1)$.

Neplatí: $\boldsymbol{u}_d=k\cdot\boldsymbol{u}_p$ $\Rightarrow$ přímky jsou různoběžné nebo mimoběžné.

Hledáme průsečík:

$$\begin{array}{l} 1+2t=-1+2s \\ 2-t=-1+s \\ \underline{-1+t=-2+s} \\ 2t-2s=-2 \\ -t-s=-3 \\ \underline{t-s=-1 \Rightarrow t=s-1} \end{array}$$

Dosadíme do zbývajících rovnic:

$$\begin{array}{l} 2(s-1)-2s=-2 \\ \underline{-(s-1)-s=-3} \\ 0=0 \\ -2s=-4 \Rightarrow s=2 \end{array}$$

$\Rightarrow t=s-1=2-1=1$ $\Rightarrow$ průsečík existuje.

Dopočítáme souřadnice průsečíku:

$$\begin{array}{l} x=1+2t=1+2\cdot 1=3 \\ y=2-t=2-1=1 \\ z=-1+t=-1+1=0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ průsečík má souřadnice $Q[3;1;0]$.

Přímky p a d jsou různoběžné.

Př. 7: Petáková:
strana 118/cvičení 37 a)
strana 118/cvičení 38
strana 118/cvičení 39
strana 118/cvičení 40

Shrnutí: